

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Теория вероятностей
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 90 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 180, всего зач. ед.: 4

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Курс предназначен для студентов, интересующихся необходимым вероятностным фундаментом для приложений в статистике и компьютерных науках. Для прохождения курса необходимы базовые знания математического анализа, комбинаторики и простейшей вероятности (классическая вероятность, схема испытаний Бернулли, условные вероятности, независимость событий, дискретные случайные величины, математическое ожидание, закон больших чисел). В курс включены основные главы теории вероятностей, а также некоторые главы случайных процессов.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение основных современных методов теории вероятностей.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в теории вероятностей;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в теории вероятностей;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в теории вероятностей.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
	УК-3.2 Учитывает в своей социальной и профессиональной деятельности интересы, особенности поведения и мнения (включая критические) людей, с которыми работает/взаимодействует, в том числе посредством корректировки своих действий
	УК-3.3 Способен предвидеть результаты (последствия) как личных, так и коллективных действий
	УК-3.4 Способен планировать командную работу, распределять поручения членам команды, организовать обсуждение разных идей и мнений
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии математических исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;  
современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;  
предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дискретные вероятностные пространства.	6	6		15
2	Независимость произвольного набора случайных величин.	6	6		15
3	Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах.	6	6		15
4	Случайные элементы, случайные величины и векторы.	6	6		15
5	Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (доказательство единственности).	2	2		18
6	Условные вероятности.	4	4		12
Итого часов		30	30		90
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		180 час., 4 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

1. Дискретные вероятностные пространства.

Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.

2. Независимость произвольного набора случайных величин.

Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся наборов независимых случайных величин.

3. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах.

Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, его основные свойства. Дисперсия, ковариация и их свойства.

4. Случайные элементы, случайные величины и векторы.

Случайные элементы, случайные величины и векторы. Достаточное условие измеримости отображения, следствия для случайных величин и векторов. Действия над случайными величинами.

5. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (доказательство единственности).

Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (доказательство единственности). Теорема Лебега о функции распределения.

6. Условные вероятности.

Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры.

**5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

**6. Перечень рекомендуемой литературы**

Основная литература

1. Вероятность [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов / А. Н. Ширяев . — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2004 . — Т. 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. - 2004. - 520 с.
2. Комбинаторика и теория вероятностей [Текст] / А. М. Райгородский - М.МФТИ, 2012

Дополнительная литература

1. Вероятностные процессы [Текст]. Вып. 2/К. Ито , -М., Изд-во иностранной лит., 1963

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
	УК-3.2 Учитывает в своей социальной и профессиональной деятельности интересы, особенности поведения и мнения (включая критические) людей, с которыми работает/взаимодействует, в том числе посредством корректировки своих действий
	УК-3.3 Способен предвидеть результаты (последствия) как личных, так и коллективных действий
	УК-3.4 Способен планировать командную работу, распределять поручения членам команды, организовать обсуждение разных идей и мнений
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии математических исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория вероятностей» обучающийся должен:

### знать:

фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;  
 современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;  
 понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
 основные свойства соответствующих математических объектов;  
 аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

### уметь:

понять поставленную задачу;  
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;  
 оценивать корректность постановок задач;  
 строго доказывать или опровергать утверждение;  
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
 точно представить математические знания в теории вероятностей в устной и письменной форме.

### владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;  
предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры домашних задач

1. Из совокупности всех подмножеств множества  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  по схеме выбора с возвращением выбираются множества  $A$  и  $B$  (сначала выбирается множество  $A$  равновероятно из совокупности всех подмножеств множества  $S$ , затем так же выбирается множество  $B$ ). Найдите условную вероятность того, что множества  $A$  и  $B$  состоят из  $l_1$  и  $l_2$  элементов соответственно при условии, что они не пересекаются.
2. Какова вероятность того, что в случайном графе на 4 вершинах с вероятностью проведения ребра  $\frac{2}{3}$  нет треугольников?
3. Найдите число  $a$ , удовлетворяющее следующему условию. Пусть  $v$  — фиксированная вершина случайного графа  $G(n, 0.3)$ ,  $\deg v$  — степень вершины  $v$  в этом графе. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено  $P(\deg v - a > \varepsilon) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .
4. Отрезок  $A$  имеет длину 1. Найдите вероятность того, что из отрезка  $A$  и двух наудачу взятых отрезков  $B, C$  длиной не более чем 1 можно составить треугольник.
5. Вспомним задачу о встрече. Пусть  $A_1$  — событие, заключающееся в том, что Коля пришел на встречу раньше Васи,  $A_2$  — событие, заключающееся в том, что Вася пришел на встречу раньше Коли,  $B$  — событие, заключающееся в том, что Коля и Вася встретились. Вычислите вероятности  $P(B|A_1)$  и  $P(B|A_2)$  и найдите их разность.

Примеры задач итоговой контрольной

1. Вася и Коля договорились встретиться в интервале с 9 часов до 10 часов, и оба приходят в случайный момент в этом периоде. Кроме того, они договорились о том, что ждут друг друга ровно 20 минут, после чего незамедлительно уходят. К сожалению, у Коли часы спешат на час, и он об этом не знает, поэтому придет на встречу в периоде с 8 до 9. С какой вероятностью встреча состоится?
2. Две монеты были подброшены 4800 раз. Найдите вероятность, что два герба выпало менее 1140 раз.
3. В таблице записано 100 случайных упорядоченных пар цифр (каждая пара была выбрана равновероятно из множества всех пар цифр). Найдите приближительное значения вероятности того, что пара 09 встречается в этой таблице не менее двух раз.
4. Контрольная работа состоит из двух тестовых вопросов. В каждом вопросе 5 вариантов ответа, из которых один — верный. Студент плохо готовился и поэтому знает только 10 вопросов (из 25). Он вынимает два вопроса случайно и без возвращения. Неправильный ответ на тесте не штрафует, поэтому если студент не знает ответа, то он отвечает наугад равновероятно. Какова вероятность того, что студент знает ответ хотя бы на один вопрос, если он отметил верные ответы на оба из них?

Курс состоит из 11 модулей (недель), включающих лекцию, семинарские задачи с разбором и домашние задачи, предложенные в виде теста. В конце студенты пишут итоговую контрольную, после чего принимают участие в экзамене, состоящем из письменной и устной части. Итоговая оценка складывается из балла за домашние задачи, за итоговую контрольную, за письменный и устный экзамены.

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Вопросы к экзамену:

1. Вероятностное пространство. Аксиомы Колмогорова. Теорема о непрерывности в "нуле" вероятностной меры.



2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.
3. Геометрические вероятности. Примеры.
4. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Примеры.
5. Теорема о монотонных классах.
6. Независимость событий и систем событий. Пример Бернштейна. Лемма о достаточном условии независимости сигма-алгебр.
7. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (док-во единственности).
8. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, его основные свойства. Дисперсия, ковариация и их свойства.
9. Случайные элементы, случайные величины и векторы. Достаточное условие измеримости отображения, следствия для случайных величин и векторов. Действия над случайными величинами.
10. Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся наборов независимых случайных величин.
11. Математическое ожидание случайной величины (интеграл Лебега по вероятностной мере): определение для простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Проверка корректности определений.
12. Основные свойства математического ожидания. Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин.
13. Дисперсия, ковариация и их свойства. Неравенство Коши - Буняковского. Дисперсия суммы независимых случайных величин. Матрица ковариаций случайного вектора, ее неотрицательная определенность.
14. Неравенство Маркова, Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Иенсена.
15. Виды сходимости случайных величин, их взаимосвязи. Критерий Коши сходимости с вероятностью 1.
16. Неравенство Колмогорова. Теорема о сходимости почти на верного ряда из случайных величин.
17. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями.
18. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема о монотонной сходимости, лемма Фату, теорема Лебега о мажорированной сходимости.
19. Лемма Бореля Кантелли. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.
20. Формула пересчета математических ожиданий. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега.
21. Прямое произведение вероятностных пространств. Теорема Фубини (б/д). Совместное распределение конечного набора случайных величин. Свертка распределений.
22. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер. Теорема Александрова (б/д). Теорема об эквивалентности сходимости по распределению случайных величин и сходимости функций распределения во всех точках непрерывности предельной функции.
23. Схема испытаний Бернулли и полиномиальная схема. Предельные теоремы для схемы Бернулли: теорема Пуассона и теорема Муавра-Лапласа (б/д).
24. Характеристические функции вероятностных мер. функций распределения, случайных величин и векторов. Примеры. Основные свойства характеристических функций случайных величин.
25. Теорема единственности для характеристических функций вероятностных. Независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций.
26. Теорема непрерывности для характеристических функций (б/д). Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.
27. Теорема Берри Эссеена о скорости сходимости в центральной предельной теореме (б/д). Оценки константы в теореме Берри Эссеена.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.

2. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер. Теорема Александрова (б/д).

Билет №2

1. Неравенство Маркова, Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Иенсена.

2. Математическое ожидание случайной величины (интеграл Лебега по вероятностной мере): определение для простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Проверка корректности определений.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.